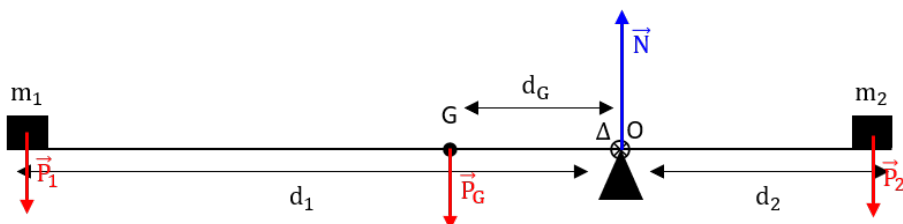


Exercice n°1 • Balançoire

cours

1)



2) Moment d'inertie du système :

$$J_{sys} = J_{barre} + m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2$$

Moment de chaque force :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_1) = (\vec{OM}_1 \wedge \vec{P}_1) \cdot \vec{u}_\Delta = -d_1 m_1 g$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_2) = (\vec{OM}_2 \wedge \vec{P}_2) \cdot \vec{u}_\Delta = d_2 m_2 g$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_b) = (\vec{OG} \wedge \vec{P}_b) \cdot \vec{u}_\Delta = -d_G m g = -\frac{d_1 - d_2}{2} m g$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{N}) = (\vec{OO} \wedge \vec{N}) \cdot \vec{u}_\Delta = 0$$

On applique le TMC :

$$J_{sys} \ddot{\theta}(t) = -d_1 m_1 g + d_2 m_2 g - \frac{d_1 - d_2}{2} m g$$

3) La balançoire est équilibrée si $\theta = cte$, donc $\ddot{\theta} = 0$. Ainsi,

$$-d_1 m_1 + d_2 m_2 - \frac{d_1 - d_2}{2} m = 0$$

4) Le TMC donne :

$$\ddot{\theta}(t) = 0 \Rightarrow \dot{\theta}(t) = \omega_0 \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \omega_0 t}$$

5) Le TMC donne cette fois, tant que la balançoire est en mouvement :

$$J_{sys} \ddot{\theta}(t) = -\Gamma_0 \Rightarrow \dot{\theta}(t) = \omega_0 - \frac{\Gamma_0}{J_{sys}} t \geq 0 \quad \text{si} \quad t \leq t_m = \frac{\omega_0 J_{sys}}{\Gamma_0}$$

Ainsi :

$$\boxed{\theta(t) = \omega_0 t - \frac{\Gamma_0}{2J_{sys}} t^2} \quad \text{si} \quad t \leq t_m$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\omega_0^2 J_{sys}}{2\Gamma_0}} \quad \text{si} \quad t \geq t_m$$

Exercice n°2 • Patineuse

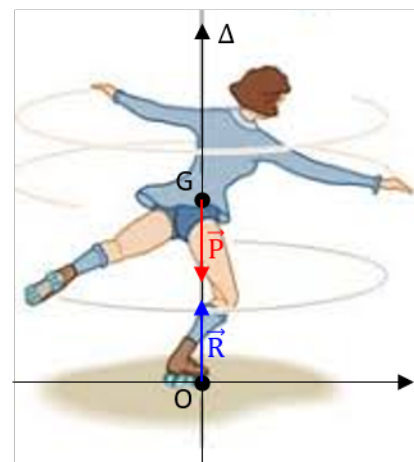


1) Lorsqu'elle rapproche ses bras et se met dans une position de pirouette, la patineuse rapproche la masse de l'axe de rotation. Or, le moment d'inertie d'un solide est :

$$J_\Delta \propto m_{tot} \times (\text{distance à l'axe})^2$$

Ici, m_{tot} reste constante (la masse de la patineuse), mais la distance de la masse à l'axe diminue, donc J diminue.

2) On néglige toute source de frottement. La patineuse est donc soumise à son poids, appliqué au centre de masse G situé sur l'axe de rotation et à la réaction normale du support, appliqué au point de contact O du patin avec le sol, situé sur l'axe de rotation. Les moments de ces deux forces sont donc nuls puisque O et G sont sur l'axe Δ .



Le TMC donne immédiatement que :

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{L_{\Delta} = cte}$$

3) Par définition :

$$L_{\Delta} = cte = J_{\Delta} \omega \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \frac{J_{\Delta,0}}{J_{\Delta,1}} \omega_0 = 3,5 \text{ tours} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Exercice n°3 • Chute d'une échelle



L'échelle est soumise à son poids et à la réaction normale du support.

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = (\vec{OG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_z = -\frac{Rmg}{2} \cos(\theta)$$

$$\mathcal{M}_z(\vec{N}) = (\vec{OO} \wedge \vec{N}) \cdot \vec{u}_z = 0$$

Le TMC donne donc :

$$\boxed{J_z \ddot{\theta} = -\frac{Rmg}{2} \cos(\theta)}$$

Exercice n°4 • Freinage à vélo



1) L'essentiel de la masse est à la distance R de l'axe, on choisira le moment du cylindre creux pour lequel $J = mR^2$.

2) Le bras de levier de chacune des forces est R , le moment résultant est donc :

$$\boxed{\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = -FR}$$

3) La roue est soumise à son poids et à la réaction de l'axe qui ont tous deux un moment nul par rapport à l'axe Δ puisqu'elles passent toutes les deux par lui. Le TMC par rapport à l'axe Δ s'écrit donc :

$$\boxed{J \ddot{\theta} = -2FR}$$

4) Avec les conditions initiales, on en déduit immédiatement :

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 - \frac{2FR}{J} t} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta(t) = \omega_0 t - \frac{FR}{J} t^2}$$

5) La roue s'arrête pour $\omega = 0$ soit :

$$t_m = \frac{J\omega_0}{2FR} \Rightarrow \theta_m = \frac{J\omega_0^2}{4FR} = \frac{mR\omega_0^2}{4F}$$

Pour avoir $\theta_m = 2\pi$, il faut avoir :

$$\boxed{F = \frac{m\omega_0^2 R}{8\pi} = 6,0 \text{ N}}$$

C'est facilement réalisable. La force nécessaire sera cependant bien plus importante si le vélo roule car la masse du cycliste augmentera beaucoup l'énergie cinétique de l'ensemble. Le problème n'est cependant plus celui d'un solide autour d'un axe fixe. Le moment d'inertie d'une roue lenticulaire est inférieure puisqu'une partie de la masse est à une distance inférieure à R , le freinage sera donc plus efficace et il faudra une force inférieure pour arrêter la roue sur un tour.

Exercice n°5 • Gravimètre



1) Le poids et le moment de rappel élastique sont conservatifs, d'énergies potentielles respectives mgz et $K\theta^2/2$. Le mouvement sera conservatif en l'absence de frottement. En choisissant l'altitude nulle sur l'axe Δ , on a $z = \ell \cos(\theta)$ et donc :

$$\mathcal{E}_p = mg\ell \cos(\theta) + \frac{1}{2}K\theta^2 = \boxed{\frac{1}{2}K(\theta^2 + a \cos(\theta))}$$

2) On doit retrouver, au voisinage de $\theta = 0$, la parabole concave de $K\theta^2/2$ pour a petit et l'arche du cosinus pour a grand. On en déduit que $a_{(b)} < a_{(a)} < a_{(c)}$. On a dans tous les cas un extremum local en $x = 0$ et donc une position d'équilibre. Elle sera stable si et seulement si il s'agit d'un minimum local, c'est-à-dire dans les cas (a) et (b). En revanche il apparaît dans le cas (c) deux positions d'équilibre stable pour deux valeurs symétriques ($\pm x_e$) non nulles de θ .

3) On fait un DL à l'ordre 4 :

$$\mathcal{E}_p \simeq \frac{1}{2}K \left(\theta^2 \left(1 - \frac{a}{2} \right) + \frac{a\theta^4}{24} \right) + cte$$

4) Si $a \neq 2$, on peut se limiter au terme d'ordre 2. L'énergie potentielle est celle d'un oscillateur harmonique si $a < 2$ et l'équilibre est alors stable. Il est instable si $a > 2$. Pour $a = 2$, on garde le terme d'ordre 4 : $\mathcal{E}_p = \frac{aK\theta^4}{48}$ qui possède un minimum :

l'équilibre est ici aussi stable.

5) La conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} K \left(1 - \frac{a}{2}\right) \theta^2 = cte$$

Il s'agit bien de l'énergie d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\omega_0^2 = \frac{K \left(1 - \frac{a}{2}\right)}{J} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J} - \frac{mg\ell}{J}}$$

On rappelle que la pulsation d'un pendule pesant est : $\omega_1 = \sqrt{\frac{mg\ell}{J}}$.

6) On a :

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{d\omega_0}{dg} = \frac{d}{dg} [\ln(\omega_0)] = \frac{1}{2} \frac{d}{dg} \left[\ln \left(\frac{K}{J} - \frac{mg\ell}{J} \right) \right] = \left[-\frac{2m\ell J^2}{K - mg\ell} \right]$$

De même :

$$\frac{1}{\omega_1} \frac{d\omega_1}{dg} = \frac{d}{dg} [\ln(\omega_1)] = \frac{1}{2} \frac{d}{dg} \left[\ln \left(\frac{mg\ell}{J} \right) \right] = \left[-\frac{1}{2g} \right]$$

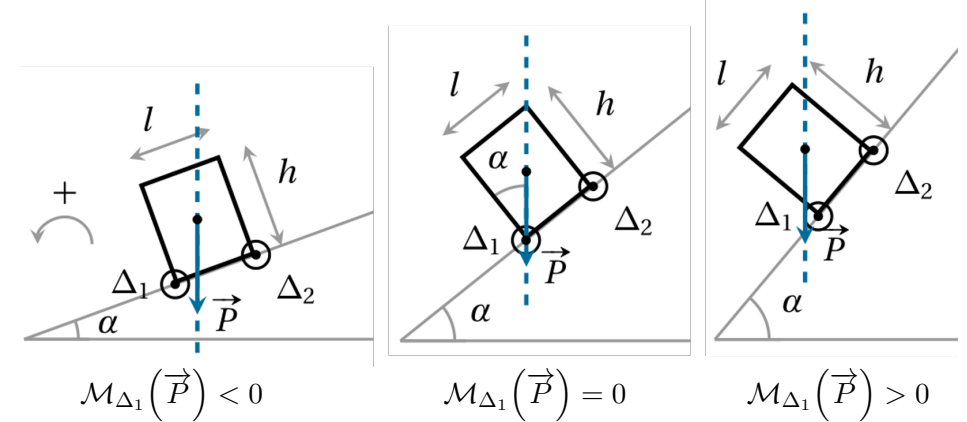
On constate que $\frac{1}{\omega_0} \frac{d\omega_0}{dg}$ sera d'autant plus important que K/J et $mg\ell/J$ sont proches, c'est-à-dire que a est proche de 2. On pourra ainsi rendre la sensibilité arbitrairement plus grande que celle du pendule pesant.

7) Le moment du poids d'un adulte par rapport à l'axe est trop grand et on se trouve alors dans le régime $a > 2$: le système ne peut plus osciller autour de $\theta = 0$. Il oscille en revanche autour d'une des positions d'équilibre ($\pm x_e$) de la courbe (c).

Exercice n°6 • Basculements d'un parallélépipède



1) Le poids s'applique au centre d'inertie G . Le moment par rapport à un axe sera positif si et seulement si la droite verticale issue de G passe à gauche de cet axe. Le moment par rapport à l'axe Δ_2 sera donc toujours positif. Celui par rapport à l'axe Δ_1 sera positif si G est à gauche de l'arête.



2) Si le contact est ponctuel, la force de contact passe par l'axe Δ et son moment par rapport à l'axe Δ est nul (car bras de levier nul).

3) Si l'objet est légèrement décollé, seule l'arête Δ_2 est en contact avec le support. La force de contact a donc un moment nul par rapport à Δ_2 . Le TMC autour de l'axe Δ_2 s'écrit donc :

$$\frac{dL_{\Delta_2}}{dt} = J_{\Delta_2} \dot{\omega}_{\Delta_2} = \mathcal{M}_{\Delta_2}(\vec{P}) > 0$$

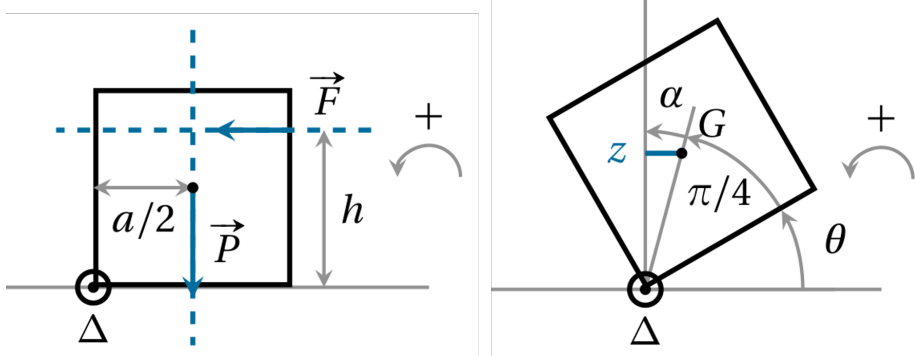
Le moment du poids tend à faire augmenter $\dot{\omega}$, le solide va donc se mettre à tourner dans le sens positif : l'objet recolle au support.

4) Il faut tourner dans le sens positif pour basculer : $\dot{\omega}_{\Delta_1} \geq 0$. Ce sera le cas si

$$\alpha \geq \arctan(\ell/h)$$

(cf. figure du milieu). On vérifie que plus l'objet est plat, c'est-à-dire plus le rapport ℓ/h augmente, plus le plan pourra être incliné avant que le basculement ne se produise (α plus grand).

5) On suppose comme précédemment que le cube a juste commencé à se décoller : son basculement se poursuivra si le cube tourne dans le sens positif. Seuls le poids et la force $\vec{F}$ ont un moment non nul par rapport à l'axe Δ et leurs bras de leviers respectifs sont h et $a/2$ (cf. figure de gauche ci-dessous).



On applique le TMC :

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = J_{\Delta} \dot{\omega}_{\Delta} = Fh - \frac{mga}{2}$$

On aura donc basculement pour :

$$Fh \geq \frac{mga}{2}$$

L'intensité sera minimale si le bras de levier est maximal, soit en $h = a$. Elle vaudra alors $F = mg/2$.

6) Le poids étant conservatif, on définit l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + mgz$, avec z l'altitude du centre d'inertie G par rapport au support. Le travail minimal correspond à amener le cube immobile à l'angle θ .

Le centre d'inertie G est toujours à la distance $a/\sqrt{2}$ de l'axe Δ . Son altitude est donc $z = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\alpha)$, où α l'angle entre la diagonale de la face du cube et la verticale (cf. figure de droite ci-dessus). On a de plus que : $\alpha = \pi/4 - \theta$. Ainsi :

$$z = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\pi/4 - \theta) = \frac{a}{2} (\cos(\theta) + \sin(\theta))$$

Selon le TEM, la variation de l'énergie mécanique est due au travail de la force non conservative $\vec{F}$:

$$\Delta \mathcal{E}_m = \Delta \mathcal{E}_p = \frac{mga}{2} (\cos(\theta) + \sin(\theta) - 1) = W(\vec{F})$$

Il suffit, pour provoquer le basculement, que le centre dépasse l'aplomb de l'axe, comme on l'a vu dans l'étude du plan incliné. On doit donc atteindre $\theta = \pi/4$ et le travail minimal à fournir est donc :

$$W_{min}(\vec{F}) = \frac{mga}{2} (\sqrt{2} - 1)$$

7) Le PFD assure qu'il faudra que $F > \mu mg$ pour déplacer le cube.

8) On considère un déplacement de longueur a où le cube est immobile au départ et à l'arrivée. Le travail de la force de frottement sera $W(\vec{T}) = \mu mga$. En notant $W(\vec{F})$ le travail de la force $\vec{F}$, le TEC s'écrit :

$$\Delta \mathcal{E}_c = 0 = W(\vec{T}) + W_{min}(\vec{F}) \Rightarrow W_{min}(\vec{F}) = \mu mga$$

8) Il est donc :

○ plus facile de faire rouler le cube si $\frac{mg}{2} < \mu mg$, soit si

$$\mu > 1/2$$

○ moins coûteux en énergie de le faire rouler si $\frac{mga}{2} (\sqrt{2} - 1) < \mu mga$, soit si

$$\mu > \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = 0,20$$

Pour la valeur de $\mu = 0,3$ donnée, il est moins coûteux en énergie de faire rouler le cube mais il faudra caler l'axe pour le faire basculer sans qu'il ne glisse.

Exercice n°7 • Transmission de puissance



1) La vitesse linéaire du point de contact de chacune des roues est la même mais ils tournent en sens inverse. On en déduit, en notant respectivement ω_1 et ω_2 les vitesses angulaires de chacune des roues, qu'on a :

$$\omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2$$

2) La vitesse d'ascension de la masse m est égale à la vitesse linéaire de la roue 2 sur son rayon :

$$\dot{z} = \omega_2 R_2$$

PFD à la masse m . On note T l'intensité de la tension du fil :

$$m \ddot{z} = -mg + T$$

TMC à la roue 2. On note $\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2}$ le moment des actions de contact exercé par la roue 1 sur la roue 2. Le bras de levier de la tension $\vec{T}$ étant R_2 , on a :

$$J_2 \dot{\omega}_2 = -T R_2 + \mathcal{M}_{1 \rightarrow 2}$$

TMC à la roue 1. On note $\mathcal{M}_{2 \rightarrow 1}$ le moment des actions de contact exercé par la roue 2 sur la roue 1. Le bras de levier de la force $\vec{F}$ de l'opérateur étant noté D , on a :

$$J_1 \dot{\omega}_1 = -FD + \mathcal{M}_{2 \rightarrow 1}$$

Le principe des actions réciproques assure par ailleurs que la force exercée par la roue 1 sur la roue 2 est l'opposée de celle exercée par la roue 2 sur la roue 1 mais leurs moments par rapport aux axes de rotation respectifs sont de même signe puisque les axes de rotation sont de part et d'autre du point de contact. Leurs bras de levier par rapport aux axes de symétrie des roues sont dans le rapport des périmètres des roues soit dans celui des nombres de dents. On a donc :

$$N_1 \mathcal{M}_{1 \rightarrow 2} = N_2 \mathcal{M}_{2 \rightarrow 1}$$

En combinant toutes les équations :

$$\begin{aligned} m \ddot{z} &= -mg + T \\ &= -mg + \frac{1}{R_2} (\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2} - J_2 \dot{\omega}_2) \\ &= -mg + \frac{1}{R_2} \left(\frac{N_2}{N_1} \mathcal{M}_{2 \rightarrow 1} - J_2 \frac{\ddot{z}}{R_2} \right) \\ &= -mg + \frac{1}{R_2} \left(\frac{N_2}{N_1} (J_1 \dot{\omega}_1 + FD) - J_2 \frac{\ddot{z}}{R_2} \right) \\ &= -mg + \frac{1}{R_2} \left(\frac{N_2}{N_1} \left(-J_1 \frac{R_2}{R_1} \dot{\omega}_2 + FD \right) - J_2 \frac{\ddot{z}}{R_2} \right) \\ &= -mg + \frac{1}{R_2} \left(\frac{N_2}{N_1} \left(-J_1 \frac{R_2}{R_1} \frac{\ddot{z}}{R_2} + FD \right) - J_2 \frac{\ddot{z}}{R_2} \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\ddot{z} \left(m + \frac{J_2}{R_2^2} + \frac{J_1 N_2}{N_1 R_1 R_2} \right) = \frac{FD N_2}{N_1 R_2} - mg$$

3) En régime permanent, $\ddot{z} = 0$. Ainsi :

$$F_0 = \frac{mg N_1 R_2}{D N_2}$$

Or, pour que les dents des deux engrenages s'emboîtent, il faut que les dents aient la même taille, notée d . Ainsi :

$$d = \frac{2\pi R_1}{N_1} = \frac{2\pi R_2}{N_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

On en déduit :

$$F_0 = \frac{mg R_1}{D}$$

4) La puissance fournie par l'opérateur :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = -F_0 D \omega_1 = -mg R_1 \omega_1$$

La puissance du poids :

$$\mathcal{P}(\vec{P}) = -mg \dot{z} = -mg R_2 \omega_2$$

Or, $\omega_1 N_1 = -\omega_2 N_2$. On en déduit :

$$0 = \mathcal{P}(\vec{F}) + \mathcal{P}(\vec{P})$$

La relation précédente n'est rien d'autre que le TEC en régime stationnaire puisque l'on néglige toute source de frottement. En effet, le TEC en régime non-stationnaire donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\omega}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\omega}_2^2 \right) = \mathcal{P}(\vec{F}) + \mathcal{P}(\vec{P})$$

5) Si l'opérateur lève directement la masse, il doit fournir une force :

$$F = mg = 3,92 \text{ kN} > F_{max} = 0,50 \text{ kN}$$

Ce n'est donc pas possible.

On sait que :

$$F = \frac{mg R_1}{D} \Rightarrow R_{1,max} = \frac{F_{max} D}{mg} = 6,4 \text{ cm}$$

Tout rayon $R_1 < R_{1,max}$ marche.